



GEOGEBRA

رسم اعداد رادیکالی روی محور

پروژه‌های جئوجبرایی!

سید مهدی بشارت • قسمت دوم

• فرایند فوق را آن قدر ادامه می‌دهیم تا به $\sqrt{8}$ یا رادیکال مورد نظرمان برسیم.

می‌بینید که یک مشکل بزرگ اینجا وجود دارد. برای یافتن جای جذر هر عدد طبیعی روی محور باید جذر همه اعداد قبلی را رسم کرد! آیا راه دیگری وجود ندارد؟ باز هم از رابطه فیثاغورس مدد می‌گیریم.

فرض کنید می‌خواهیم $\sqrt{14}$ را مشخص کنیم. آیا می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که وتر آن $\sqrt{14}$ یا خیلی نزدیک به آن باشد؟ یعنی اعداد طبیعی a و b را چنان بیابیم که $a^2 + b^2$ نزدیک‌ترین عدد به ۱۴ باشد؟

به این منظور بزرگ‌ترین مربع کاملی را که از ۱۴ کوچک‌تر است، پیدا می‌کنیم. این عدد ۹ است. پس $a=3$. برای تعیین b توجه داریم که $a^2 + b^2 \leq 14$. بنابراین:

$$b^2 \leq 14 - 9 \Rightarrow b^2 \leq 5 \Rightarrow b = 2$$

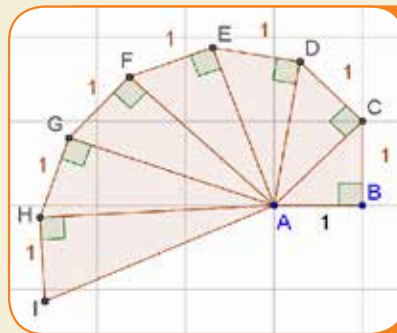
در نتیجه:

$$a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

پس باید مثلثی قائم‌الزاویه به اضلاع ۳ و ۲ بسازیم که وتر آن $\sqrt{13}$ است.

سپس برای رسیدن به $\sqrt{14}$ باید یک طبقه دیگر روی آن بنا کنیم.

در قسمت پیش بیان شد که به کمک نمودار حلزونی می‌توان جذر هر عدد طبیعی را روی محور اعداد نمایش داد. مانند نمودار ۱ که $\sqrt{8}$ را نشان می‌دهد. برای رسم این نمودار، در نرم‌افزار «جئوجبرا»:



نمودار ۱

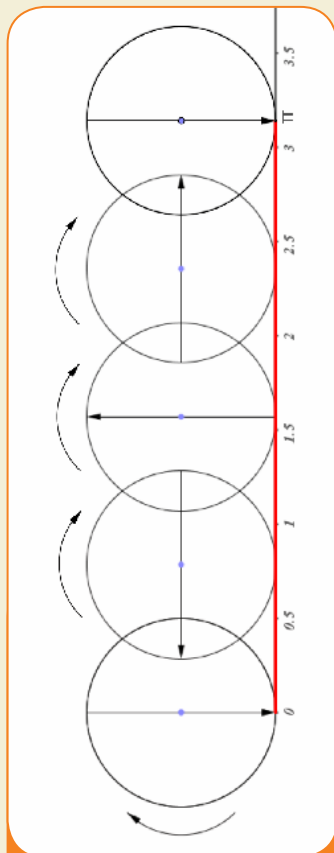
۱. با ابزار مثلث قائم‌الزاویه ABC را می‌کشیم.
۲. به منظور رسم عمودی به اندازه ۱ واحد بر ضلع AC، ابتدا با ابزار از نقطه C بر ضلع AC خطی عمود می‌کشیم.
۳. سپس با ابزار دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۱ می‌کشیم.
۴. با ابزار نقطه تقاطع دایره و خط عمود (نقطه D) را می‌یابیم.
۵. با ابزار مثلث ACD را رسم می‌کنیم.



آیا هر عدد گنگی را می‌توان روی محور اعداد نمایش داد؟

هر عدد حقیقی، چه گویا باشد چه گنگ، یک نقطه کاملاً مشخص روی محور اعداد دارد.

مثلاً برای اینکه جای عدد π روی محور مشخص شود، کافی است دایره‌ای به قطر ۱ (شعاع 0.5) را یک دور روی محور اعداد بچرخانیم. محیط دایره برابر است با حاصل ضرب قطر در عدد π ، پس محیط این دایره، با عدد π برابر می‌شود و وقتی یک دور کامل روی محور می‌چرخد، به اندازه عدد π جلو می‌رود.



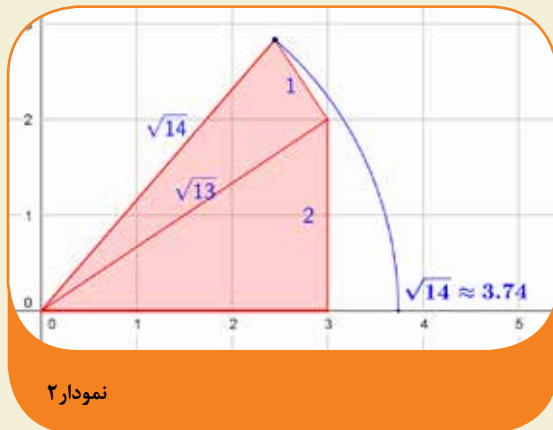
نمودار ۴

برای دیدن پویانمایی نمایش عدد π روی محور، به صفحه زیر مراجعه نمایید:
<http://www.geogebra.org/m/gXz3zRU7>

گرچه هر عدد حقیقی، چه گنگ و چه گویا، یک نقطه مشخصی روی محور دارد، ولی جای همه اعداد گنگ را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار مشخص کرد.

مثلاً اعداد رادیکالی با فرجه ۳ را نمی‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد و روی محور نمایش داد.

در ریاضیات ثابت می‌شود که فقط اعداد رادیکالی با فرجه ۲ یا توانی از ۲ مثل فرجه ۴ یا ۸ یا ۱۶ و... با خط‌کش و پرگار قابل رسم هستند و دیگر اعداد رادیکالی قابل رسم نیستند، گرچه هر کدام نقطه کاملاً مشخصی روی محور اعداد دارند.

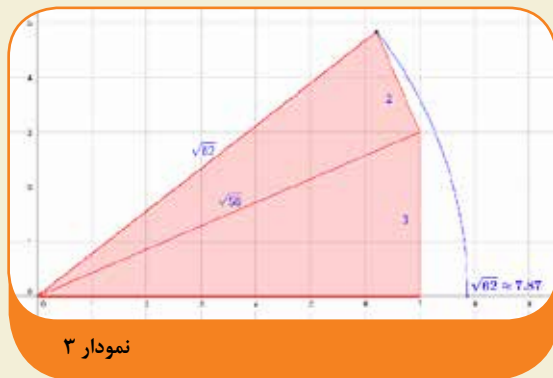


نمودار ۲

به‌عنوان یک مثال دیگر به $\sqrt{6}$ می‌پردازیم. بزرگ‌ترین مربع کامل کوچک‌تر از ۶۲، عدد ۴۹ است. فاصله ۴۹ تا ۶۲ برابر با ۱۳ واحد است.

بزرگ‌ترین مربع کامل کوچک‌تر از ۱۳، عدد ۹ است. فاصله ۹ تا ۴۹ برابر با ۴۰ واحد است.

با توجه به اینکه ۴۰ خود ۴۰ = ۲۰ + ۲۰ است، می‌نویسیم: $62 = 7^2 + 3^2 + 2^2$ را این‌گونه روی محور مشخص می‌کنیم:



نمودار ۳

نتیجه

برای یافتن جای جذر هر عدد طبیعی روی محور، باید آن را به‌صورت مجموع مربعات چند عدد نوشت.

در مثال‌های بالا برای $\sqrt{14}$ از $1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$ ، و برای $\sqrt{62}$ از $7^2 + 3^2 + 2^2 = 62$ استفاده کردیم. حالا نوبت شماست. سعی کنید

$\sqrt{8}$ و $\sqrt{10}$ را روی محور مشخص کنید. فایل موجود در

صفحه <http://www.geogebra.org/m/jwhMUvnmw> به شما در رسم رادیکال اعداد طبیعی کمک می‌کند.